Chapitre M2 – Dynamique du point

I) Lois de Newton

1) Principe d'inertie – première loi de Newton

Un système est dit **isolé** si aucune action extérieure ne s'exerce sur lui. Un système est dit **pseudo-isolé** si l'ensemble des actions extérieures se compensent parfaitement.

Principe d'inertie

Il existe des référentiels particuliers, appelés **référentiels galiléens** ou **référentiels inertiels**, par rapport auxquels un point matériel isolé ou pseudo-isolé est en mouvement rectiligne uniforme (ou immobile).

Conséquence :

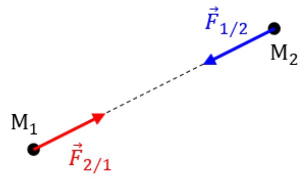
Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

Le principe d'inertie postule l'existence des référentiels galiléens. En revanche, il ne dit pas comment les trouver. En pratique on ne connaît aucun référentiel galiléen (parfait) ! On suppose seulement qu'ils le sont durant la durée τ de l'expérience.

Exemple :

Le référentiel terrestre (observateur sur la surface de la Terre) est galiléen si $\tau \ll 24$ h, la période de rotation de la Terre sur elle-même.

2) Principe des actions réciproques – troisième loi de Newton



Si un point M_1 exerce une force sur un point M_2, alors M_2 exerce sur M_1 une force de même norme, de même direction (la droite M_1M_2) et de direction opposée.

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{1/2} = -\overrightarrow{F}_{2/1}}$$

3) Principe fondamental de la dynamique – deuxième loi de Newton

On appelle **quantité de mouvement** du point matériel M la grandeur : $\boxed{\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}}$

Si un système est composé de plusieurs points matériels : $\boxed{\overrightarrow{p} = \sum m_i \overrightarrow{v}_i}$

Dans le cas d'un système non ponctuel de centre de masse G, la quantité de mouvement vaut : $\boxed{\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}_{\mathrm{G}}}$

Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un système est égale à la résultante des forces extérieures s'appliquant sur ce système.

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \sum \overrightarrow{F}_{ext}}$$

Remarques :

- Si la masse est constante, le PFD devient :

$$\frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{v}\right) = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F}_{ext}}$$

- Si le système est isolé ou pseudo-isolé :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{cte}}$$

  alors il se déplace en mouvement rectiligne uniforme.

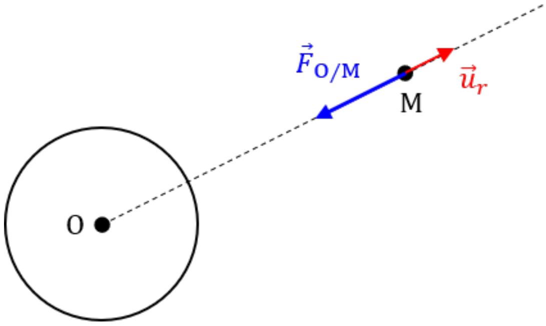
- Dans le cas d'un système non ponctuel pseudo-isolé : $\vec{v}_G = \vec{0}$. Le centre de masse se déplace en mouvement rectiligne uniforme, mais le système peut continuer à tourner autour de son centre de masse.

II) Mouvement dans un champ de pesanteur

1) Force de gravitation

Soit deux systèmes de centre de masse O (masse m_O) et M (masse m). On se place en coordonnées sphériques. La force de gravitation exercée par O sur M vaut :

$$\boxed{\vec{F}_{O/M} = -G\frac{m_O m}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{avec :} \quad \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}}$$



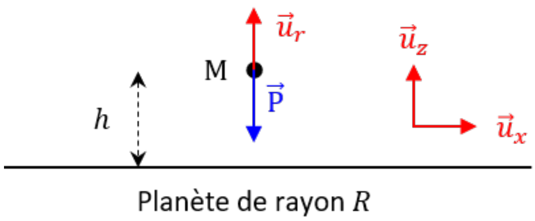
Avec G la constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

C'est une force toujours attractive, du fait du signe « − ».

2) Poids

Si le point M se situe proche de la surface de la planète de centre O, alors on peut faire les approximations : $r = R + h \simeq R$ et $\vec{u}_r \simeq \vec{u}_z$. La force gravitationnelle devient alors uniforme :

$$\underbrace{\vec{F}_{O/M}}_{=\vec{P}} = m \times \underbrace{\frac{-Gm_O}{R^2}\vec{u}_z}_{=\vec{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$$



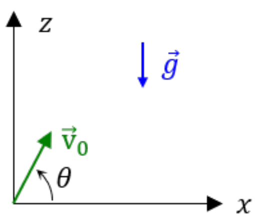
Avec $\vec{g}$ l'accélération de pesanteur de la planète.

Pour la Terre : $\boxed{g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}}$

3) Chute libre

Soit un point M de masse m placé dan un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme. À l'instant initial, on suppose que :

$$\overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\theta) \\ 0 \\ v_0 \sin(\theta) \end{pmatrix}$$



<u>Système</u> : point M

<u>Référentiel</u> : terrestre supposé galiléen

On applique le PFD :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}}$$

L'accélération est constante. On intègre deux fois pour avoir la vitesse puis la position.

$$\vec{a} = \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{g} \times t + \vec{v}_0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OM}(t) = \frac{\vec{g}}{2} \times t^2 + \vec{v}_0 \times t$$

On peut projeter sur chaque axe :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos(\theta) & \leftarrow /\vec{u}_x \\ y(t) = 0 & \leftarrow /\vec{u}_y \\ z(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0 t \sin(\theta) & \leftarrow /\vec{u}_z \end{cases}$$

Déterminons la portée du tir. Par définition, on cherche x tel que $z = 0$.

$$z(t) = 0 = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t\ \sin(\theta) = t\left(-\frac{gt}{2} + v_0\ \sin(\theta)\right)$$

La solution $t = 0$ correspond à l'instant initial. L'autre solution correspond à l'état final.

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{2v_0}{g}\ \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad x(t_1) = v_0 t_1\ \cos(\theta) = \frac{2v_0^2}{g}\ \sin(\theta)\cos(\theta) = \boxed{\frac{v_0^2}{g}\ \sin(2\theta)}$$

La portée est maximale lorsque $\sin(2\theta) = 1$, donc $\boxed{\theta = \pi/4}$

4) Frottements fluide – cas des faibles vitesses

On reprend l'étude du II.3 et on prend en compte les frottements fluides de l'air sur M qui exerce une force : $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$ avec $\alpha > 0$. Cette force s'oppose toujours au vecteur vitesse, et tend donc à ralentir M.

Système : point M

Référentiel : terrestre supposé galiléen

On applique le PFD :

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} - \alpha\overrightarrow{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m}\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{g}}$$

On reconnaît l'ED d'ordre 1. On identifie la met sous forme canonique puis on résout. C'est une équation vectorielle, les « constantes » d'intégration sont dont des vecteurs constants.

$$\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} + \frac{\overrightarrow{v}}{\tau} = \frac{\overrightarrow{v}_\infty}{\tau} \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{m}{\alpha} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_\infty = \frac{m\overrightarrow{g}}{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg/\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_\infty \end{pmatrix}$$

Solution générale :

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{A}\ e^{-t/\tau} + \overrightarrow{v}_\infty$$

Avec la condition initiale :

$$\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{v}_\infty = \overrightarrow{v}_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{v}(t) = \left(\overrightarrow{v}_0 - \overrightarrow{v}_\infty\right)\ e^{-t/\tau} + \overrightarrow{v}_\infty}$$

On peut projeter sur chaque axe :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -v_0\ \cos(\theta)\, e^{-t/\tau} & \leftarrow\ /\overrightarrow{u}_x \\ \dot{y}(t) = 0 & \leftarrow\ /\overrightarrow{u}_y \\ \dot{z}(t) = -\tau\Big(v_0\ \sin(\theta) + v_\infty\Big)\ e^{-t/\tau} - v_\infty & \leftarrow\ /\overrightarrow{u}_z \end{cases}$$

On primitive pour avoir le vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = -\tau\Big(\overrightarrow{v}_0 - \overrightarrow{v}_\infty\Big)\ e^{-t/\tau} + \overrightarrow{v}_\infty \times t + \tau\Big(\overrightarrow{v}_0 - \overrightarrow{v}_\infty\Big)}$$

5) Frottements fluide – cas des fortes vitesses

On reprend l'étude du II.3 et on prend en compte les frottements fluides de l'air sur M qui exerce une force : $\overrightarrow{f} = -\beta v\overrightarrow{v}$ avec $\beta > 0$. Cette force s'oppose toujours au vecteur vitesse, mais contrairement au modèle précédent, sa norme dépend de v^2.

Système : point M

Référentiel : terrestre supposé galiléen

On applique le PFD :

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} - \beta v\overrightarrow{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} + \frac{\beta}{m}\ v\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g}}$$

Derrière cette ED vectorielle se cache 3 ED non linéaires et couplées.

$$\begin{cases} \dfrac{d\dot{x}}{dt} + \dfrac{\beta \dot{x}}{m}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = 0 \\ \dfrac{d\dot{y}}{dt} + \dfrac{\beta \dot{y}}{m}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = 0 \\ \dfrac{d\dot{z}}{dt} + \dfrac{\beta \dot{z}}{m}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = -g \end{cases}$$

Il n'existe pas de solution analytique. On peut tout de même déterminer la vitesse en régime permanent $\overrightarrow{v}_\infty$ et le temps caractéristique τ du régime transitoire.

Vitesse en régime permanent

On cherche une solution particulière constante $\overrightarrow{v}_\infty$ de l'ED. On note v_∞ la norme de $\overrightarrow{v}_\infty$.

$$\frac{\beta}{m}\, v_\infty \overrightarrow{v}_\infty = \overrightarrow{g}$$

C'est une équation vectorielle, elle est donc vraie en norme :

$$\frac{\beta}{m}\, v_\infty^2 = g \quad \Rightarrow \quad v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}$$

et en direction :

$$\overrightarrow{v}_\infty \propto \overrightarrow{g} \propto -\overrightarrow{u}_z$$

Finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{v}_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_\infty \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}}$$

Temps caractéristique du régime transitoire

Il faut identifier un paramètre homogène à un temps dans l'équation différentielle. Pour l'instant chaque terme est homogène à une accélération (vitesse / temps). Divisons l'ED par v_∞.

$$\frac{1}{v_\infty}\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} + \frac{\beta}{m v_\infty}\, v\,\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{g}}{v_\infty}$$

Chaque terme est alors homogène à l'inverse d'un temps. On en déduit :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{g}{v_\infty} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{v_\infty}{g} = \sqrt{\frac{m}{\beta g}}}$$

III) Réaction d'un support

1) Réaction normale

Lorsqu'un système est en contact avec un support, pour empêcher qu'il ne lui passe à travers, le support exerce une force dans la direction orthogonale au support, vers l'extérieur, notée $\overrightarrow{R}_N$. La norme de cette réaction normale est une inconnue, sa valeur dépend des autres forces. Dans le cas où le contact est rompu, la réaction est nulle.

2) Réaction tangentielle – frottements de glissement

Le support peut également exercer une force de frottements, notée $\overrightarrow{R}_T$, dont l'expression est donnée par les **lois de Coulomb**. On se place dans le référentiel du support et on note $\overrightarrow{v}$ la vitesse du système. On distingues deux cas.

- Cas de non glissement :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{R}_T\right\| \leq f \left\|\overrightarrow{R}_N\right\|}$$

◦ Cas de glissement :

$$\boxed{\vec{v} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_T = -f \left\| \vec{R}_N \right\| \vec{u}_\parallel} \quad \text{avec :} \quad \vec{u}_\parallel = \frac{\vec{v}}{v}$$

où $\vec{u}_\parallel$ est le vecteur unitaire dans le sens du mouvement.

Le coefficient f s'appelle **coefficient de frottements**. C'est un nombre sans dimension qui dépend de la nature de l'interface. Il est compris entre 0 (surface parfaitement glissante) et $\simeq 1$ (surface très rugueuse)

On rencontre parfois deux coefficients de frottements différents :

◦ f_s **coefficient de frottements statique**, lorsque le système ne glisse pas ;
◦ f_d **coefficient de frottements dynamique**, lorsque le système glisse.

Remarque :

Les frottements s'opposent au glissement et non au mouvement. Lorsqu'on marche, c'est pour s'opposer au glissement du pied sur le sol que l'on avance.

Méthodologie :

Les lois de Coulomb dépendent d'une condition : glissement ou non glissement. On commence donc par faire une hypothèse, on utilise la loi de Coulomb correspondante et on vérifie ensuite la limite de validité de cette hypothèse.

Hypothèse	Relation à utiliser	Valable tant que ...
Non glissement	$\vec{v} = \vec{0}$	$\left\| \vec{R}_T \right\| \leq f_s \left\| \vec{R}_N \right\|$
Glissement	$\vec{R}_T = -f_d \left\| \vec{R}_N \right\| \vec{u}_\parallel$	$\vec{v} \neq \vec{0}$

3) Application

Exercice TD : Carton sur un plan incliné

IV) Élasticité des matériaux

1) Loi de Hooke

Un matériau qui ne subit aucune contrainte possède une certaine longueur ℓ_0 appelée **longueur à vide**. Lorsqu'il subit une contrainte « faible » (traction ou compression), le matériau change légèrement de longueur (notée ℓ). La **loi de Hooke** affirme que la force qu'il subit est proportionnelle à l'élongation.

$$F \propto (\ell - \ell_0)$$

Tant que la loi de Hooke est valide (petites déformation), la matériau est dans son « domaine d'élasticité » : il retrouve sa longueur ℓ_0 lorsque la contrainte est relâchée. Au delà, soit il se déforme de manière irréversible, soit il casse.

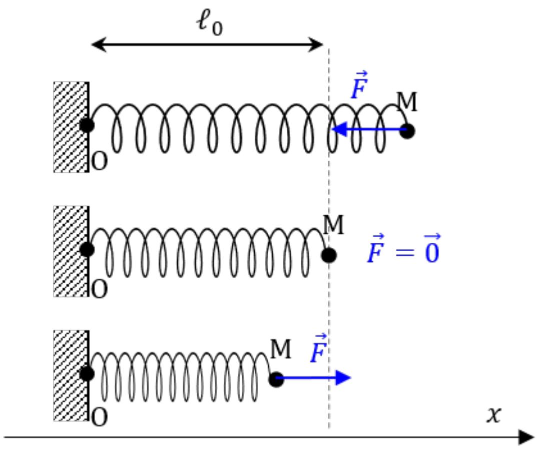
Principe des actions réciproques : un matériaux déformé exerce une **force de rappel élastique** qui tant à le ramener vers sa longueur à vide, donnée par la loi de Hooke.

Force de rappel élastique

$$\boxed{\vec{F}_{el}(\mathrm{M}) = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_{\mathrm{OM}}}$$

avec k la **raideur** du matériau.

Dans les exercices, on utilisera surtout des ressorts, qui ont l'avantage d'être souple et de rester dans le domaine élastique pour de grandes élongations.



2) Application

Exercice TD : Masse ressort sur un plan incliné

V) Pendule simple

1) Tension d'un fil

Un fil de masse négligeable prend une forme rectiligne dès qu'il est tendu. Il exerce alors sur un objet accroché à une de ses extrémités une tension notée $\overrightarrow{T}$. La direction de cette force est celle du fil. Elle est toujours dirigée d'une extrémité du fil vers l'autre : un fil peut tirer un objet mais pas le repousser. La norme de la tension est une inconnue, sa valeur dépend des autres forces. Dans le cas où le fil n'est pas tendu, la tension est nulle.

2) Équation du mouvement

On considère une masse ponctuelle accrochée à l'extrémité d'un fil sans masse. Ce système s'appelle un **pendule simple**. La masse est soumise à son poids et à la tension du fil.

Exercice TD : Pendule simple